

3. Sea $f: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}$ la aplicación lineal definida como

$$f(p) = \int_0^1 p(x) dx.$$

Obtenga las ecuaciones cartesianas de su núcleo. Determine una base de su núcleo y de su imagen.

- $\text{Ker } f: \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] : f(p) = 0\}$

$p \in \text{Ker } f \quad f(p) = 0 ; \quad \int_0^1 p(x) dx = 0 ; \quad \int_0^1 ax^2 + bx + c = 0 ; \quad \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx \right]_0^1 = 0$
 $\left. \begin{aligned} \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0 \end{aligned} \right\} \text{ ecs cartesianas}$

$\dim \text{Ker } f = \mathbb{R}_2[x] - \text{n}^\circ \text{ ecs independientes} = 3 - 1 = 2$

$B_{\text{Ker } f} = \{(3, 0, -1), (0, 2, -1)\}$ Vectores que satisfacen $\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0$

- $\text{im } f: \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] : n = f(p); n \in \mathbb{R}\}$

$\dim \text{im } f = 3 - 2 = 1 = \mathbb{R} \quad B_{\text{im } f} = \{(1)\}$

4. Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya matriz en la base canónica es

$$A_{f|B_c B_c} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Determine las dimensiones de $\text{ker } f$ e $\text{im } f$.

(b) Obtenga las ecuaciones cartesianas de $\text{ker } f$.

(c) Encuentre bases de $\text{ker } f$ e $\text{im } f$.

(d) ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva?

a) $A_{f|B_c B_c} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rg } A_{f|B_c B_c} = 2 ; \quad \dim \text{im } f = 2$

$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \text{im } f + \dim \text{ker } f ; \quad \dim \text{ker } f = 3 - 2 = 1$

b) $\dim \text{ker } f = \dim \mathbb{R}^3 - \text{n}^\circ \text{ ecs} ; \quad \text{n}^\circ \text{ ecs} = 2$

$f(v) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{B_c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \text{dep. } \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

$$c) B_{\ker f} = \{(1, 0, -1)\} \quad B_{\text{im} f} = \{(-1, 1, 1), (1, 3, 1)\}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$f(1, 0, -1) \quad f(1, 3, 1)$$

5. Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida como

$$f((x, y, z)) = (a + y + z, x + a + z, x + y + a), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Estudie si existe algún valor de a para el que f sea un isomorfismo.

Para que sea aplicación lineal, $f((0, 0, 0)) = (0, 0, 0)$. Así que

$$f((0, 0, 0)) = (a, a, a). \text{ Para que sea lineal, } a = 0$$

Para saber si es isomorfismo, debemos comprobar que es biyectiva. Esto ocurrirá siempre que su matriz asociada sea regular ($\det A \neq 0$)

$$A_{f|_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \det A_{f|_{\mathbb{R}^3}} = 2 ; \text{rg } A = 3 ; \text{Isomorfismo } \checkmark$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(1,0,0) & f(0,1,0) & f(0,0,1) \end{matrix}$

6. Encuentre una aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\ker f$ sea el subespacio definido por las ecuaciones

$$\begin{cases} 2x - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

y satisfaga las igualdades $f((1, 0, 1)) = (0, 1, 0)$ y $f((0, 1, 1)) = (0, 0, 1)$.

$$\dim \ker f = \dim \mathbb{R}^3 - \text{n}^\circ \text{ ecu} = 1 \rightarrow f(1, 3, 2) = (0, 0, 0) \quad B_{\ker f} = \{(1, 3, 2)\}$$

Vemos posible base de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{rg } A = 3 \rightarrow B_{\mathbb{R}^3} = \{(1, 3, 2), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$$

Entonces:

$$\boxed{(f(v^j))_{B_C} = A_{f|_{B_C}} \cdot (v^j)_B}$$

$$A_{f|_{B_C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow \\ f(1,3,2) \end{matrix}$

$$\downarrow$$

$$A_{f|_{B_C}} \rightarrow (v)_B = \vec{P}_{B \rightarrow B} \cdot \overset{(\cdot)}{\underset{B_C}{(v)}}_{B_C} ; \quad (f(v^j))_{B_C} = \boxed{A_{f|_{B_C}} \cdot \vec{P}_{B \rightarrow B} \cdot \overset{(\cdot)}{\underset{B_C}{(v)}}_{B_C}}$$

$$\vec{P}_{B \rightarrow B_C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{(f(v^j))_{B_C} = A_{f|_{B_C}} \cdot (\vec{P}_{B \rightarrow B_C})^T \cdot \overset{(\cdot)}{\underset{B_C}{(v)}}_{B_C}} \checkmark$$

7. Encuentre una aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f((1, 1, 1)) = (0, 0, 0)$ y $f(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v}$ contenido en el subespacio definido por la ecuación $x + y + 2z = 0$.

$$V \in U = x + y + 2z = 0 \rightarrow \dim U = \dim \mathbb{R}^3 - \text{n}^\circ \text{ ec} = 2$$

$$\begin{matrix} z = \lambda \\ y = \mu \end{matrix} \rightarrow \boxed{x = -\mu - 2\lambda} \rightarrow v = (-\mu - 2\lambda, \mu, \lambda) = \lambda \cdot (-2, 0, 1) + \mu \cdot (-1, 1, 0)$$

$$B_u = \{(-1, 1, 0), (-2, 0, 1)\} \rightarrow \text{Coger 2 vects que cumplan}$$

$$B_{\mathbb{R}^3} = \{(1, 1, 1), (-2, 0, 1), (-1, 1, 0)\}$$

$$A_{B_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Cambiar a } A_{B_{\mathbb{R}^3}} \text{ en lo visto en el ejer 6. } \checkmark$$